Das Unendliche ist unintuitiv

OWO-Vorlesung, 6. Oktober 2025

Das Summenzeichen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

Dann

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

Allgemeiner Für $p \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$

$$\sum_{k=p}^{n} a_k = a_p + a_{p+1} + a_{p+2} + \cdots + a_n$$

Unendlich Summieren

Kann man unendlich viele Zahlen aufsummieren?

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$$

Unendlich Summieren

Kann man unendlich viele Zahlen aufsummieren?

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots = \infty$$

So nicht! Zu viel

Unendlich Summieren

Kann man unendlich viele Zahlen aufsummieren?

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots = \infty$$

So nicht! Zu viel

Vielleicht so

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

Unendlich Summieren

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Kann man unendlich viele Zahlen aufsummieren?

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots = \infty$$

So nicht! Zu viel

Vielleicht so

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots = 0$$

Unendlich Summieren

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Kann man unendlich viele Zahlen aufsummieren?

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots = \infty$$

So nicht! Zu viel

Vielleicht so

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots = 0$$

$$1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots = 1$$

Unendlich Summieren

Kann man unendlich viele Zahlen aufsummieren?

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots = \infty$$

So nicht! Zu viel

Vielleicht so

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

Nein! Willkürliches Ergebnis

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots = 0$$

$$1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots = 1$$

Neuer Versuch

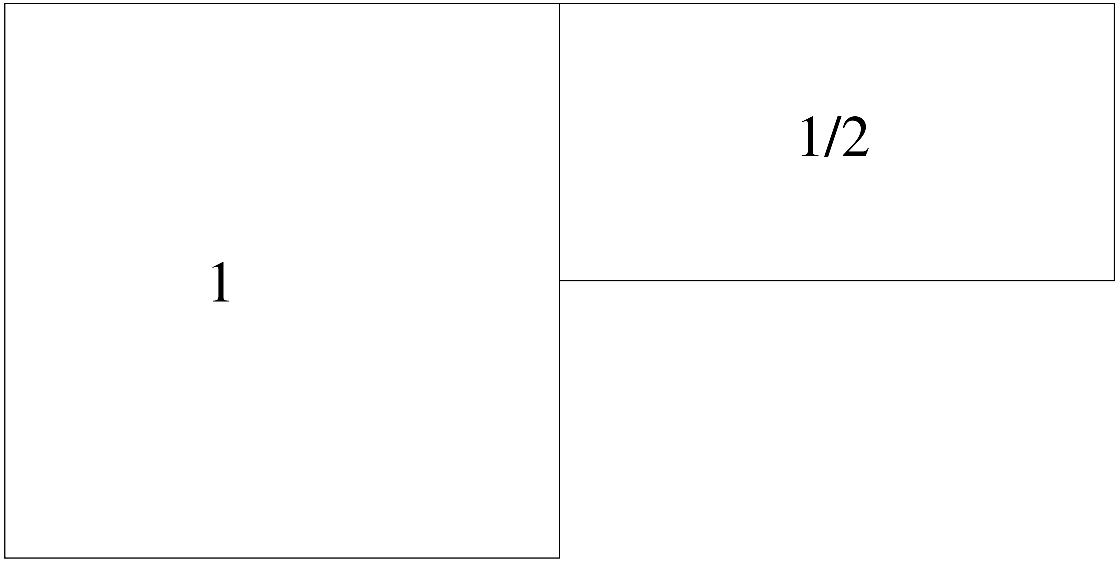
- $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots = ?$$

  Ergibt das Sinn?

Neuer Versuch

- $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots = ?$$

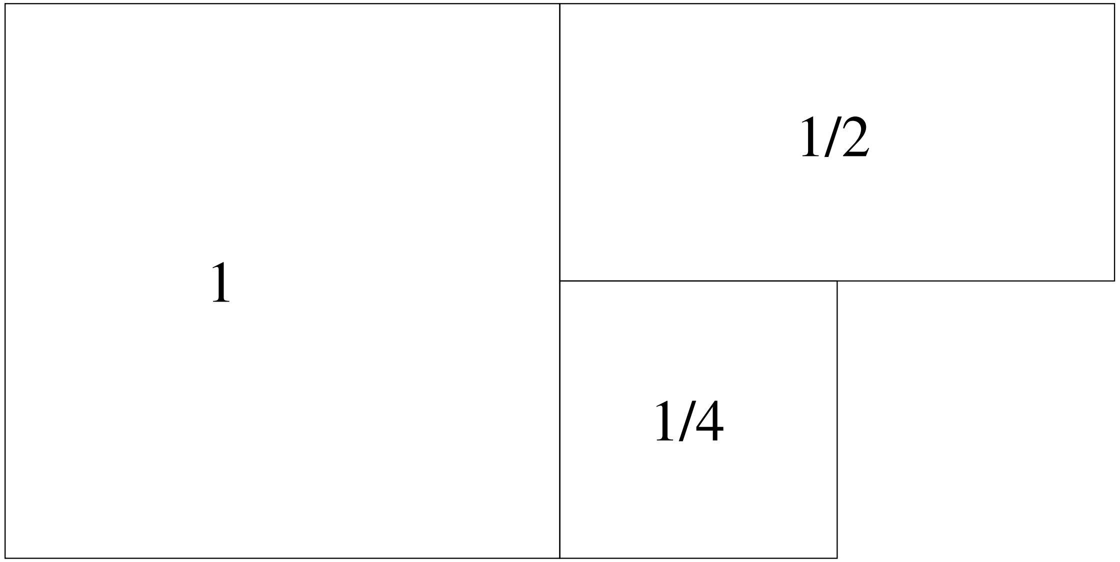
  Ergibt das Sinn?



Neuer Versuch

- $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots = ?$$

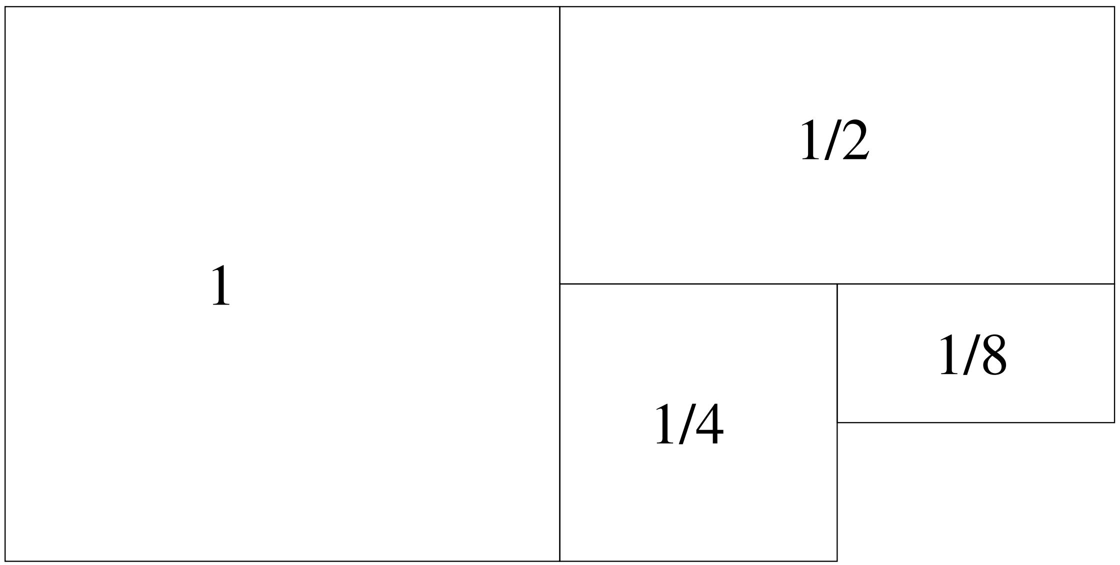
  Ergibt das Sinn?



Neuer Versuch

- $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots = ?$$

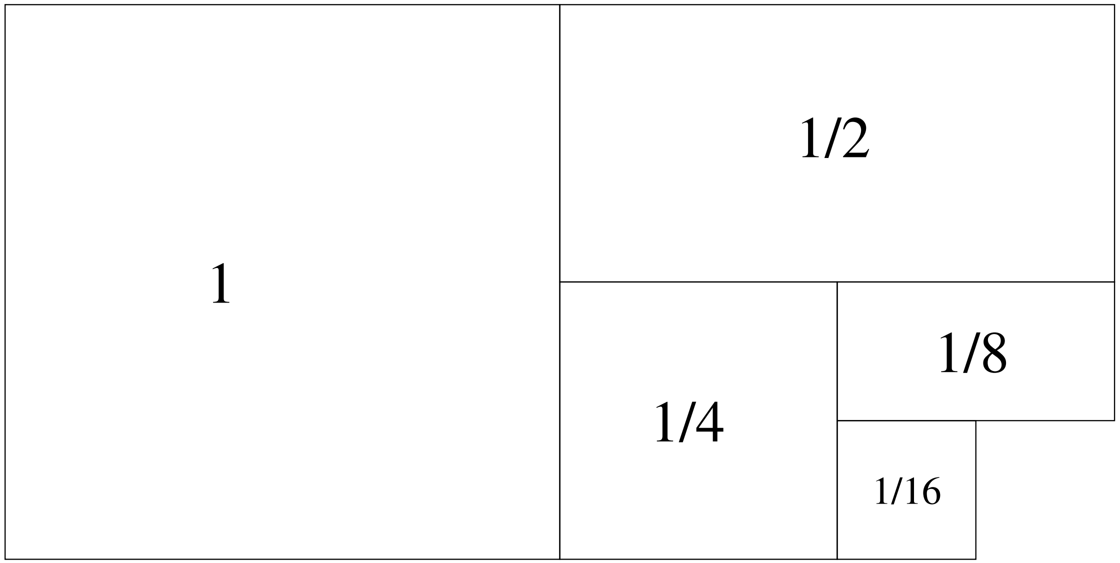
Ergibt das Sinn?



Neuer Versuch

- $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots = ?$$

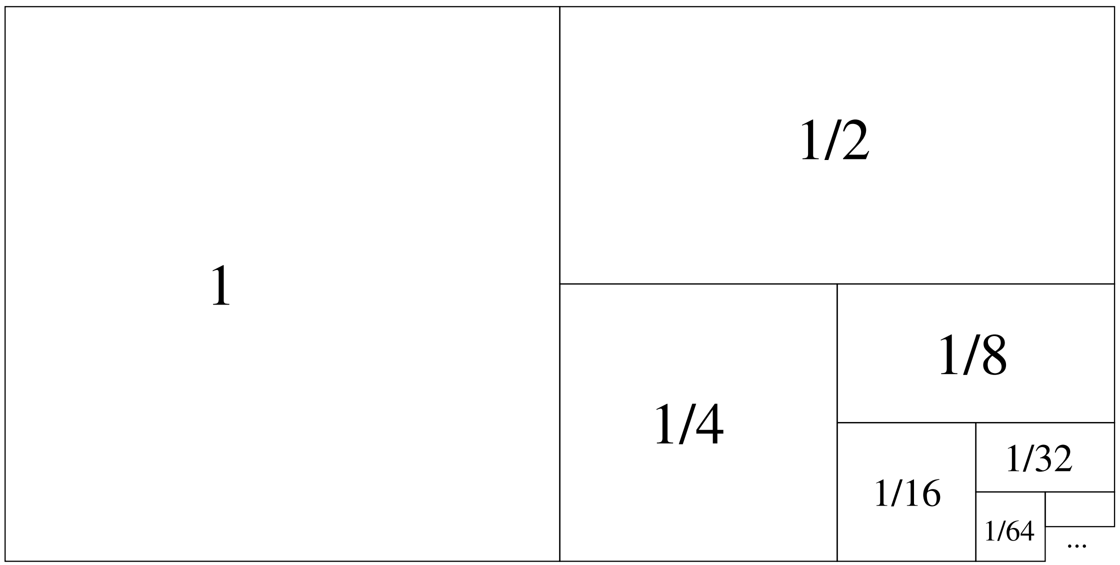
  Ergibt das Sinn?



Neuer Versuch

- $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots = ?$$

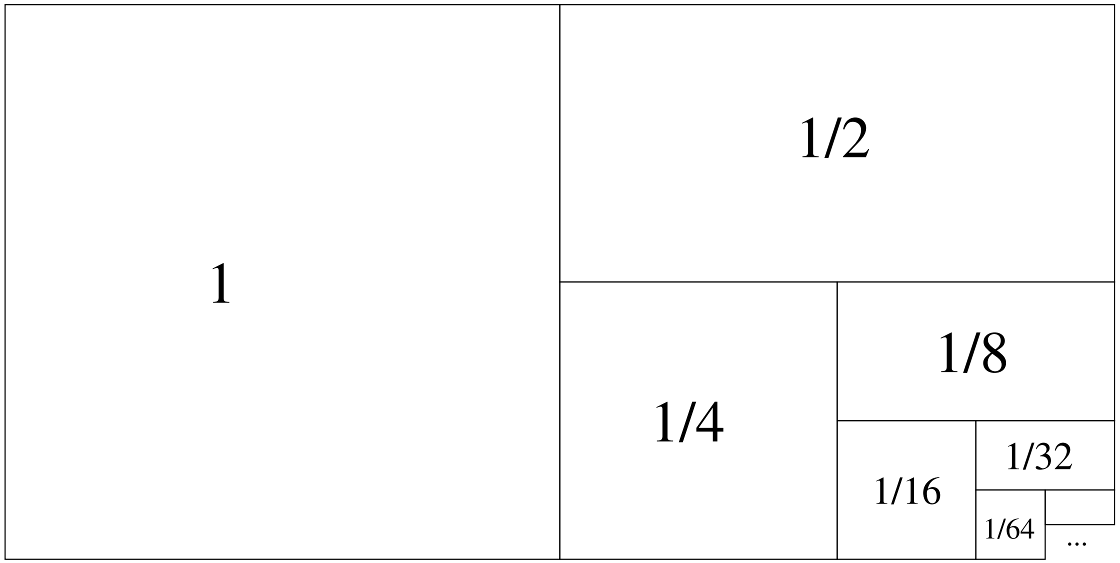
  Ergibt das Sinn?



Neuer Versuch

- $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots = 2$$

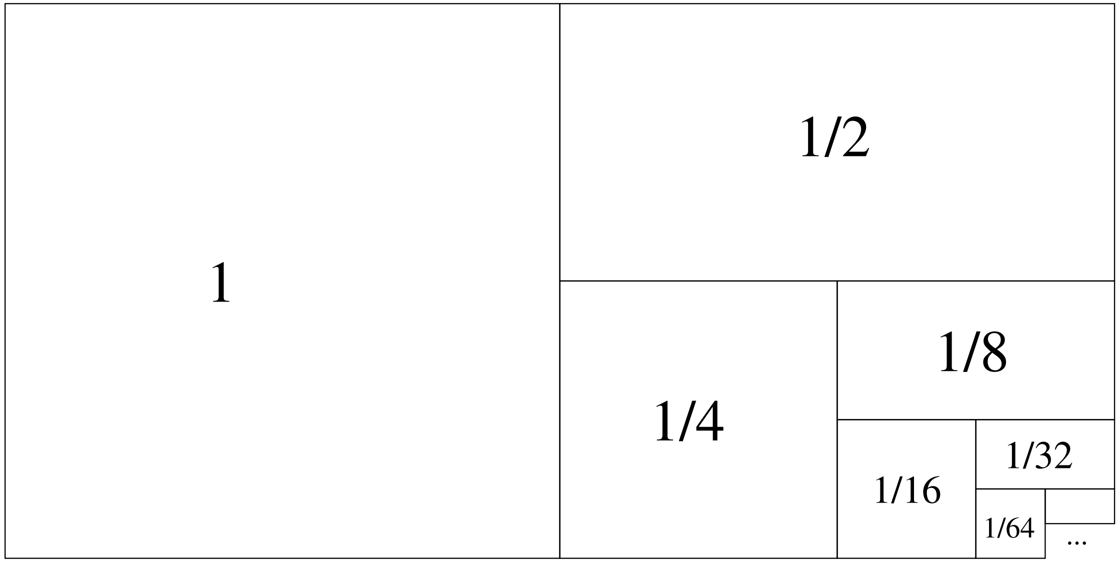
  Ergibt das Sinn? Ja!



Neuer Versuch

- $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots = 2$$

  Ergibt das Sinn? Ja!



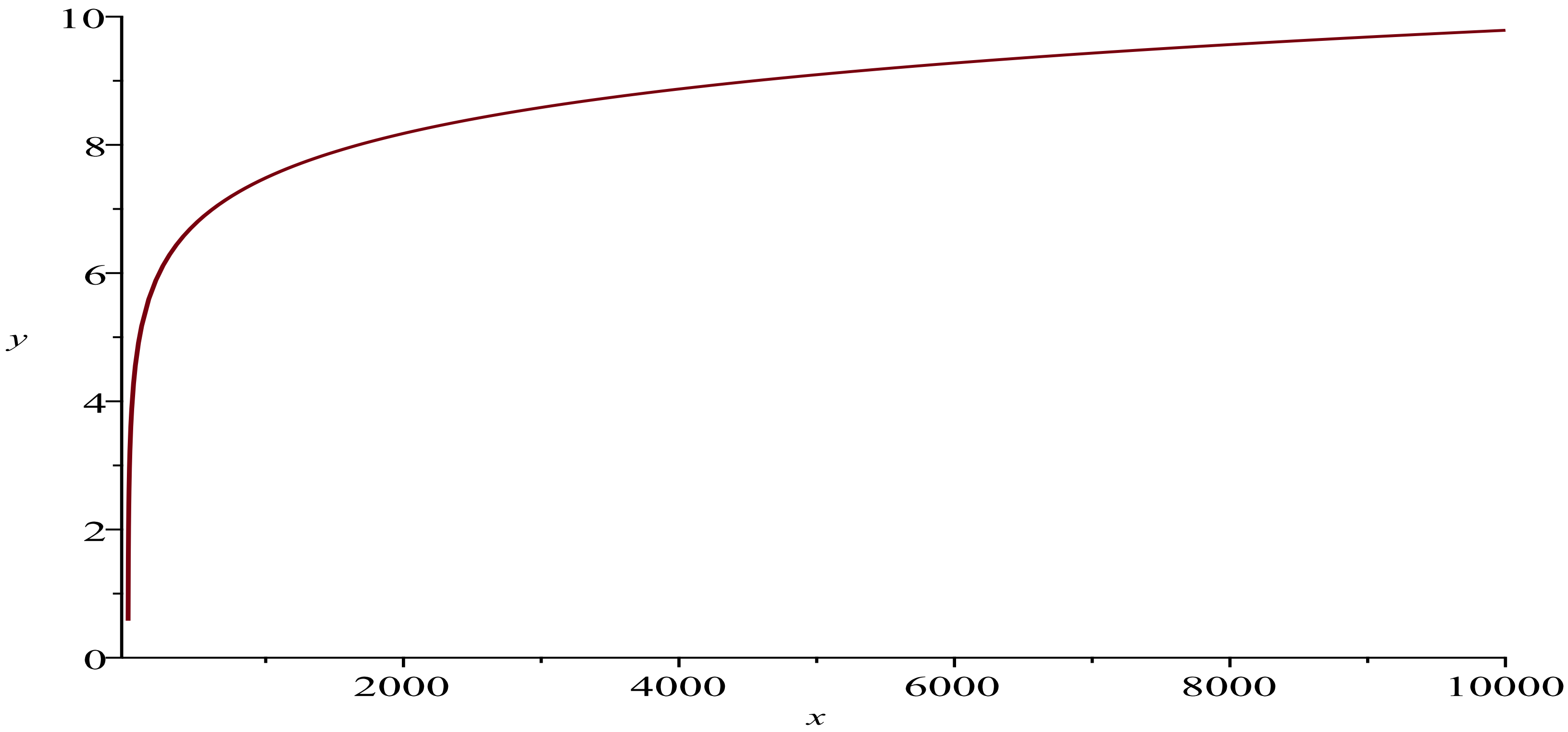
Vermutung: Die Zahlen müssen klein werden.

Neuer Versuch

- $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots = 2$$
- $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots$$

Vermutung: Die Zahlen müssen klein werden

Der Rechner hilft?



Neuer Versuch

- $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots = 2$$
- $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots$$

Vermutung: Die Zahlen müssen klein werden

Neuer Versuch

- $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots = 2$$
- $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$$

$$+\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \ldots$$

Vermutung: Die Zahlen müssen klein werden

Neuer Versuch

- $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots = 2$$
- $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$$

$$+ \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \ldots$$

Vermutung: Die Zahlen müssen klein werden

Neuer Versuch

- $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots = 2$$
- $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}}$$
$$+ \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \ldots$$

Vermutung: Die Zahlen müssen klein werden

Neuer Versuch

- $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots = 2$$
- $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}}$$
$$+ \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}}_{\geq 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}} + \ldots$$

Vermutung: Die Zahlen müssen klein werden

Neuer Versuch

- $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots = 2$$
- $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}}$$
$$+ \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}}_{\geq 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\ldots}_{\ldots}$$

Vermutung: Die Zahlen müssen klein werden

Neuer Versuch

- $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots = 2$$
- $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}}$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}}_{\geq 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\ldots \qquad\qquad}_{\ldots}$$

$= \infty$ Wieder nicht! (harmonische Reihe)

Vermutung: Die Zahlen müssen klein werden Reicht nicht!

Was heißt das?

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = 2$ ergibt endlichen Wert
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots = \infty$ wird zu groß

Was heißt das?

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = 2$ ergibt endlichen Wert
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots = \infty$ wird zu groß

Vermutung 2: Die Zahlen müssen schnell genug klein werden

Was heißt das?

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = 2$ ergibt endlichen Wert
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots = \infty$ wird zu groß

Vermutung 2: Die Zahlen müssen schnell genug klein werden

Mathematische Fragen

- Wie sieht man den summierten Zahlen an welcher Fall vorliegt?
- Wie „misst“ man das „schnell genug“?
- Welche Summen sind spannende Grenzfälle?
- Wie sieht es mit Verallgemeinerungen aus? Kann man z.B. auch Vektoren, Funktionen, … unendlich summieren? Wenn ja, was heißt dann „klein“?

Summen-Ratespiel

alle nat. Zahlen $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots = \infty$ wird zu groß

2er-Potenzen $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = 2$ bleibt endlich

Quadratzahlen $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \ldots =$

Summen-Ratespiel

alle nat. Zahlen $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots = \infty$ wird zu groß

2er-Potenzen $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = 2$ bleibt endlich

Quadratzahlen $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$

Summen-Ratespiel

alle nat. Zahlen $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots = \infty$ wird zu groß

2er-Potenzen $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = 2$ bleibt endlich

Quadratzahlen $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$

Primzahlen $\sum_{p=1, p \text{ prim}}^{\infty} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \ldots =$

Summen-Ratespiel

alle nat. Zahlen $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots = \infty$ wird zu groß

2er-Potenzen $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = 2$ bleibt endlich

Quadratzahlen $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$

Primzahlen $\sum_{p=1, p \text{ prim}}^{\infty} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \ldots = \infty$

Summen-Ratespiel

alle nat. Zahlen $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots = \infty$ wird zu groß

2er-Potenzen $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = 2$ bleibt endlich

Quadratzahlen $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$

Primzahlen $\displaystyle\sum_{p=1, p \text{ prim}}^{\infty} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \ldots = \infty$

Zahlen ohne Ziffer 9

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \ldots =$$

Summen-Ratespiel

alle nat. Zahlen $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots = \infty$ wird zu groß

2er-Potenzen $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = 2$ bleibt endlich

Quadratzahlen $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$

Primzahlen $\sum_{p=1, p \text{ prim}}^{\infty} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \ldots = \infty$

Zahlen ohne Ziffer 9

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \ldots =$?? (weniger als 80)

Wechselnde Vorzeichen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Andere Möglichkeit: Wechselnde Vorzeichen heben viel weg.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - + \dots$$

Wechselnde Vorzeichen

Andere Möglichkeit: Wechselnde Vorzeichen heben viel weg.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - + \dots$$

Wechselnde Vorzeichen

Andere Möglichkeit: Wechselnde Vorzeichen heben viel weg.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - + \ldots = \log_{\mathrm{e}}(2) = \ln(2)$$

(alternierende harmonische Reihe)

Wechselnde Vorzeichen

Andere Möglichkeit: Wechselnde Vorzeichen heben viel weg.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - + \ldots = \log_e(2) = \ln(2)$$

(alternierende harmonische Reihe)

Solche unendlichen Summen sind richtig verrückt

Wechselnde Vorzeichen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Andere Möglichkeit: Wechselnde Vorzeichen heben viel weg.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - + \ldots = \log_{\mathrm{e}}(2) = \ln(2)$$

(alternierende harmonische Reihe)

Solche unendlichen Summen sind richtig verrückt

Sagen Sie mir eine Zahl x ...

Alternierende Summen sind noch viel verrückter…

Der große Riemann'sche Umordnungssatz besagt:

Man kann die Summanden von

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - + \ldots = \log_{\mathrm{e}}(2) = \ln(2)$$

so umsortieren, dass die Summe x ergibt!

Alternierende Summen sind noch viel verrückter…

Der große Riemann'sche Umordnungssatz besagt:

Man kann die Summanden von

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - + \ldots = \log_e(2) = \ln(2)$$

so umsortieren, dass die Summe *x* ergibt!

Alternierende Summen sind noch viel verrückter. . .

Der große Riemann'sche Umordnungssatz besagt:

Man kann die Summanden von

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - + \ldots = \log_e(2) = \ln(2)$$

so umsortieren, dass die Summe x ergibt!

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \ldots$$

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} - \frac{1}{10} - \ldots$$

Alternierende Summen sind noch viel verrückter...

Der große Riemann'sche Umordnungssatz besagt:

Man kann die Summanden von

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - + \ldots = \log_e(2) = \ln(2)$$

so umsortieren, dass die Summe x ergibt!

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \ldots$$

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} - \frac{1}{10} - \ldots = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots\right)$$

Alternierende Summen sind noch viel verrückter...

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Der große Riemann'sche Umordnungssatz besagt:

Man kann die Summanden von

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - + \ldots = \log_e(2) = \ln(2)$$

so umsortieren, dass die Summe x ergibt!

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \ldots$$

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} - \frac{1}{10} - \ldots = -\frac{1}{2} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots\right)}_{\text{harmonische Reihe}} = -\infty$$

Alternierende Summen sind noch viel verrückter...

Der große Riemann'sche Umordnungssatz besagt:

Man kann die Summanden von

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - + \ldots = \log_e(2) = \ln(2)$$

so umsortieren, dass die Summe x ergibt!

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \ldots \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \ldots = +\infty$$

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} - \frac{1}{10} - \ldots = -\frac{1}{2} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots\right)}_{\text{harmonische Reihe}} = -\infty$$

Wie erreichen wir nun die Summe x?

Das Baumaterial

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\frac{1}{21}+\ldots=+\infty$$

$$-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}-\frac{1}{14}-\frac{1}{16}-\frac{1}{18}-\frac{1}{20}-\frac{1}{22}-\ldots=-\infty$$

Wie erreichen wir nun die Summe x?

Das Baumaterial

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\frac{1}{21}+\ldots=+\infty$$

$$-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}-\frac{1}{14}-\frac{1}{16}-\frac{1}{18}-\frac{1}{20}-\frac{1}{22}-\ldots=-\infty$$

- Addiere solange positives Material bis Summe größer x

Wie erreichen wir nun die Summe x?

Das Baumaterial

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\frac{1}{21}+\ldots=+\infty$$

$$-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}-\frac{1}{14}-\frac{1}{16}-\frac{1}{18}-\frac{1}{20}-\frac{1}{22}-\ldots=-\infty$$

- Addiere solange positives Material bis Summe größer x
- Subtrahiere negative Beiträge bis Summe wieder kleiner x

Wie erreichen wir nun die Summe x?

Das Baumaterial

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} + \ldots = +\infty$$

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} - \frac{1}{18} - \frac{1}{20} - \frac{1}{22} - \ldots = -\infty$$

- Addiere solange positives Material bis Summe größer x
- Subtrahiere negative Beiträge bis Summe wieder kleiner x
- Wieder bis Summe größer x addieren

Wie erreichen wir nun die Summe x?

Das Baumaterial

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\frac{1}{21}+\ldots=+\infty$$

$$-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}-\frac{1}{14}-\frac{1}{16}-\frac{1}{18}-\frac{1}{20}-\frac{1}{22}-\ldots=-\infty$$

- Addiere solange positives Material bis Summe größer x
- Subtrahiere negative Beiträge bis Summe wieder kleiner x
- Wieder bis Summe größer x addieren
- u.s.w.

Wie erreichen wir nun die Summe x?

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Das Baumaterial

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} + \ldots = +\infty$$

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} - \frac{1}{18} - \frac{1}{20} - \frac{1}{22} - \ldots = -\infty$$

- Addiere solange positives Material bis Summe größer x
- Subtrahiere negative Beiträge bis Summe wieder kleiner x
- Wieder bis Summe größer x addieren
- u.s.w.

Man beachte

- Jeder Schritt endet nach endlich vielen Summanden
- D.h. es bleibt immer Material übrig
- Die Beiträge werden immer kleiner
- D.h. die Näherung von x wird immer besser

Ein Beispiel

Betrachte: $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \quad + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} \quad + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots =$?

Ein Beispiel

Betrachte: $\underbrace{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}_{k=1}+\underbrace{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}}_{k=2}+\underbrace{\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}}_{k=3}+\cdots=$?

Jeder Dreierblock ist von der Form

$$\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2(2k-1)}-\frac{1}{2(2k-1)+2}$$

Ein Beispiel

Betrachte: $\underbrace{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}_{k=1}+\underbrace{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}}_{k=2}+\underbrace{\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}}_{k=3}+\cdots=$?

Jeder Dreierblock ist von der Form

$$\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2(2k-1)}-\frac{1}{2(2k-1)+2}=\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\Big)$$

Ein Beispiel

Betrachte: $\underbrace{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}_{k=1}+\underbrace{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}}_{k=2}+\underbrace{\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}}_{k=3}+\cdots=?$

Jeder Dreierblock ist von der Form

$$\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2(2k-1)}-\frac{1}{2(2k-1)+2}=\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\Big)$$

Also

$$?=\frac{1}{2}\Big(1-\frac{1}{2}\Big)+\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\Big)+\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\Big)+\dots$$

Ein Beispiel

Betrachte: $\underbrace{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}_{k=1}+\underbrace{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}}_{k=2}+\underbrace{\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}}_{k=3}+\dots= ?$

Jeder Dreierblock ist von der Form

$$\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2(2k-1)}-\frac{1}{2(2k-1)+2}=\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\Big)$$

Also

$$\begin{aligned} ? &= \frac{1}{2}\Big(1-\frac{1}{2}\Big)+\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\Big)+\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\Big)+\dots \\ &= \frac{1}{2}\Big(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\dots\Big) \end{aligned}$$

Ein Beispiel

Betrachte: $$\underbrace{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}_{k=1}+\underbrace{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}}_{k=2}+\underbrace{\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}}_{k=3}+\cdots=?$$

Jeder Dreierblock ist von der Form

$$\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2(2k-1)}-\frac{1}{2(2k-1)+2}=\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\Big)$$

Also

$$\begin{aligned} ? &= \frac{1}{2}\Big(1-\frac{1}{2}\Big)+\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\Big)+\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\Big)+\dots \\ &= \frac{1}{2}\Big(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\dots\Big)=\frac{1}{2}\ln(2) \end{aligned}$$