OWO-Übungsblatt

Gruppenübung
Orientierungswoche

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2026/27
Veröffentlichung: 07. Oktober 2026

Aufgabe 1: Elementare Teilbarkeit

Beweisen Sie die Resultate von Lemma 1 aus der Vorlesung.

(a) $a \mid b \Rightarrow |a| \leq |b|$ für alle $a, b \in \mathbb{Z}$

(b) $a \mid b$ und $b \mid a \Rightarrow a = \pm b$ für alle $a, b \in \mathbb{Z}$

(c) $a \mid b$ und $a \mid c \Rightarrow a \mid \pm(b \pm c)$ für alle $a, b, c \in \mathbb{Z}$

(d) $a \mid b$ und $b \mid c \Rightarrow a \mid c$ für alle $a, b, c \in \mathbb{Z}$

Aufgabe 2: Existenz unendlich vieler Primzahlen

Zeigen Sie: Es gibt unendlich viele Primzahlen der Form $4n - 1$ für $n \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 3: Teilbarkeitsregeln

Eine Teilbarkeitsregel für $n = 3$ besagt: *Eine ganze Zahl ist durch drei teilbar, genau dann, wenn die Quersumme durch drei teilbar ist.*
Beweisen Sie diese Regel.

Bonusaufgabe: Formulieren Sie eine Teilbarkeitsregel für $n = 11$.

Aufgabe 4: Die Ideale Aufgabe

Ein *Ideal* in $\mathbb{Z}$ ist eine Teilmenge $I \subseteq \mathbb{Z}$, für die gilt

(i) für alle $a \in I$ und $b \in I$ ist $a + b \in I$ und

(ii) für alle $a \in I$ und $r \in \mathbb{Z}$ ist $r \cdot a \in I$.

Sei für $a \in \mathbb{Z}$ die Menge $J_a \coloneqq a \cdot \mathbb{Z} \coloneqq \{r \cdot a : r \in \mathbb{Z}\} = \{b \in \mathbb{Z} : a \mid b\}$.

(a)
- Überlegen Sie sich, dass diese beiden Beschreibungen von J_a das Gleiche sind.
- Zeigen Sie, dass J_a (für beliebiges a) ein Ideal ist.

(b) Sei I ein Ideal in $\mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass es ein $a \in \mathbb{Z}$ gibt, sodass $I = J_a$ gilt. (Damit sind also alle Ideale in $\mathbb{Z}$ der Form J_a.)

Hinweis: Sie können benutzen, dass für den größten gemeinsamen Teiler gilt, dass für alle $x, y \in \mathbb{Z}$ existieren $a, b \in \mathbb{Z}$ sodass $ax + by = \mathrm{ggT}(x, y)$.